

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Bài 1. (4 điểm)

Giải phương trình: $\log_5(x+2) + \log_3 x = \log_{2018}(x+2015) + \log_{2019}(x+2016)$.

Bài 2. (4 điểm)

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện:
 $a > 2018^{\log_{2019} b} \geq 1$; $f(\log_{2018} a) + 2 = f(\log_{2019} b)$. Tính $\log_{2019}(a+b)$.

Bài 3. (4 điểm)

Cho hàm số $y = (x^2 - 1)^2$ có đồ thị (C) . Xét điểm M di chuyển trên (C) và có hoành độ $m \in (-1; 1)$. Tiếp tuyến của (C) ở M cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt và khác M . Tìm giá trị lớn nhất của tung độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

Bài 4. (5 điểm)

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ở A với $BC = 2a$ và hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm BC . Biết rằng diện tích của tứ giác $BCC'B'$ bằng $6a^2$.

a) Tính theo a thể tích của hình lăng trụ đã cho.

b) Tính theo a thể tích của hình trụ nhỏ nhất có hai đáy lần lượt nằm trên hai mặt phẳng $(ABC), (A'B'C')$ và chứa toàn bộ lăng trụ đã cho bên trong.

Bài 5. (3 điểm)

Cho các số thực $a, b, c \in (1; +\infty)$ thỏa mãn $a^{10} \leq b$ và $\log_a b + 2\log_b c + 5\log_c a = 12$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\log_a c + 5\log_c b + 10\log_b a$.

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (4 điểm)

Giải phương trình: $\log_5(x+2) + \log_3 x = \log_{2018}(x+2015) + \log_{2019}(x+2016)$

Cách 1:

Xét hàm số $f(x) = \log_5(x+2) - \log_{2019}(x+2016) + \log_3 x - \log_{2018}(x+2015), x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x+2)\ln 5} - \frac{1}{(x+2016)\ln 2019} + \frac{1}{x\ln 3} - \frac{1}{(x+2015)\ln 2018} \\ &= \frac{(x+2016)\ln 2019 - (x+2)\ln 5}{(x+2)(x+2016)\ln 2019 \cdot \ln 5} + \frac{(x+2015)\ln 2018 - x\ln 3}{x(x+2015)\ln 2018 \cdot \ln 3} > 0, \forall x > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$.

Mà $f(3) = 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Cách 2:

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \log_5 \frac{x+2}{5} + \log_3 \frac{x}{3} = \log_{2018} \frac{x+2015}{2018} + \log_{2019} \frac{x+2016}{2019} \quad (*)$$

Ta thấy nếu $x = 3$ thì hai vế đều bằng 0.

$$\text{Nếu } x > 3 \text{ thì } \frac{x}{3} > \frac{x+2015}{2018} > 1 \text{ và } \frac{x+2}{5} > \frac{x+2016}{2019} > 1$$

$$\Rightarrow \log_3 \frac{x}{3} > \log_3 \frac{x+2015}{2018} = \log_3 2018 \cdot \log_{2018} \frac{x+2015}{2018} > \log_{2018} \frac{x+2015}{2018} \text{ và}$$

$$\log_5 \frac{x+2}{5} > \log_5 \frac{x+2016}{2019} = \log_5 2019 \cdot \log_{2019} \frac{x+2016}{2019} > \log_{2019} \frac{x+2016}{2019}$$

$$\Rightarrow \log_5 \frac{x+2}{5} + \log_3 \frac{x}{3} > \log_{2018} \frac{x+2015}{2018} + \log_{2019} \frac{x+2016}{2019}$$

$$\text{Nếu } x < 3 \text{ thì } \frac{x}{3} < \frac{x+2015}{2018} < 1 \text{ và } \frac{x+2}{5} < \frac{x+2016}{2019} < 1$$

$$\Rightarrow \log_3 \frac{x}{3} < \log_3 \frac{x+2015}{2018} = \log_3 2018 \cdot \log_{2018} \frac{x+2015}{2018} < \log_{2018} \frac{x+2015}{2018} \text{ và}$$

$$\log_5 \frac{x+2}{5} < \log_5 \frac{x+2016}{2019} = \log_5 2019 \cdot \log_{2019} \frac{x+2016}{2019} < \log_{2019} \frac{x+2016}{2019}$$

$$\Rightarrow \log_5 \frac{x+2}{5} + \log_3 \frac{x}{3} < \log_{2018} \frac{x+2015}{2018} + \log_{2019} \frac{x+2016}{2019}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài 2. (4 điểm)

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện: $a > 2018^{\log_{2019} b} \geq 1$; $f(\log_{2018} a) + 2 = f(\log_{2019} b)$. Tính $\log_{2019}(a + b)$.

Giải.

Trước hết, xét hai số $u > v \geq 0$ và đặt $u = v + t$ với $t > 0$. Ta có

$$f(u) - f(v) = u^3 - 3u - v^3 + 3v = (v + t)^3 - v^3 - 3t = 3vt^2 + 3v^2t + t^3 - 3t.$$

Vì $v \geq 0$ nên $3vt^2 + 3v^2t + t^3 - 3t \geq t^3 - 3t = -2 + (t - 1)^2(t + 2) \geq -2$.

Do đó, ta luôn có $f(u) + 2 \geq f(v)$ và đẳng thức xảy ra khi $u = 1, v = 0$.

Học sinh có thể dùng đồ thị để chứng minh tính chất trên.

Từ giả thiết, ta có $\log_{2018} a > \log_{2019} b \geq 0$; $f(\log_{2018} a) + 2 = f(\log_{2019} b)$ suy ra

$$\log_{2018} a = 1; \log_{2019} b = 0 \Rightarrow a = 2018; b = 1 \Rightarrow \log_{2019}(a + b) = 1.$$

Bài 3. (4 điểm)

Cho hàm số $y = (x^2 - 1)^2$ có đồ thị (C) . Xét điểm M di chuyển trên (C) và có hoành độ $m \in (-1; 1)$. Tiếp tuyến của (C) ở M cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt và khác M . Tính giá trị lớn nhất của tung độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

Giải.

Phương trình tiếp tuyến của (C) ở M là

$$y = (4m^3 - 4m)(x - m) + m^4 - 2m^2 + 1 \text{ hay } y = (4m^3 - 4m)x - 3m^4 + 2m^2 + 1.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là

$$(x^2 - 1)^2 = (4m^3 - 4m)x - 3m^4 + 2m^2 + 1 \Leftrightarrow (x - m)^2(x^2 + 2mx + 3m^2 - 2) = 0.$$

Do đó, hoành độ x_A, x_B là nghiệm của $x^2 + 2mx + 3m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + m)^2 = 2 - 2m^2$ nên với điều kiện $m \in (-1; 1)$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt. Theo định lý Viète thì

$$\begin{cases} x_A + x_B = -2m \\ x_A x_B = 3m^2 - 2 \end{cases} \text{ nên ta tính được } x_A^2 + x_B^2 = 4 - 2m^2; \quad x_A^4 + x_B^4 = -2(7m^4 - 4m^2 - 4).$$

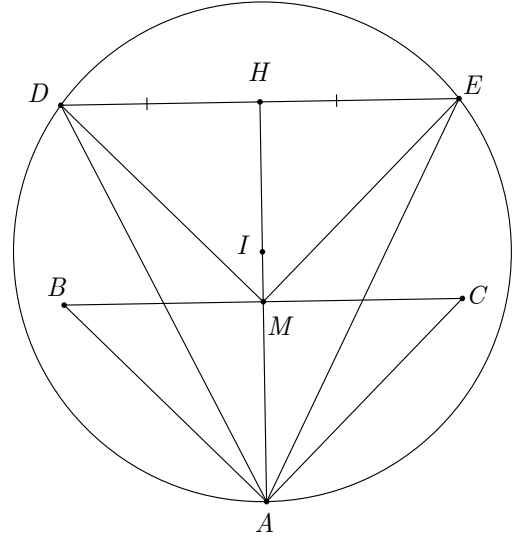
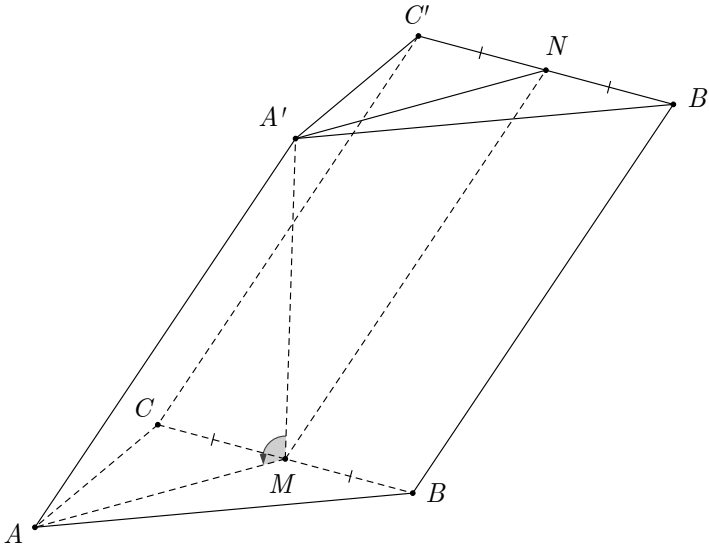
Tung độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $T = \frac{(x_A^2 - 1)^2 + (x_B^2 - 1)^2}{2} = -7m^4 + 6m^2 + 1$.

Khảo sát hàm số này trên $(-1;1)$, ta tìm được $\max T = \frac{16}{7}$ đạt được khi $m = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Bài 4. (5 điểm) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ở A với $BC = 2a$ và hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm BC . Biết rằng diện tích của tứ giác $BCC'B'$ bằng $6a^2$.

a) Tính theo a thể tích của hình lăng trụ đã cho.

b) Tính theo a thể tích của hình trụ nhỏ nhất có hai đáy lần lượt nằm trên hai mặt phẳng $(ABC), (A'B'C')$ và chứa toàn bộ lăng trụ đã cho bên trong.



a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm $BC, B'C'$ thì dễ thấy tứ giác $AMNA'$ là hình bình hành. Ta có $BC \perp AM, BC \perp A'M$ nên $BC \perp (A'AM) \equiv (AMNA')$, suy ra $BC \perp MN$.

Mà $MN \parallel BB' \parallel CC'$ nên tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật. Do đó $BB' = CC' = \frac{6a^2}{2a} = 3a$.

Từ đó ta có $AA' = 3a$ và tam giác $AA'M$ vuông ở M nên $A'M = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

Vậy nên $V_{ABC.A'B'C'} = A'M \cdot S_{ABC} = 2a\sqrt{2} \cdot \frac{a \cdot 2a}{2} = 2\sqrt{2}a^3$ (đơn vị thể tích).

b) Ta thấy hình trụ cần tìm có cùng chiều cao với lăng trụ đã cho là $h = 2\sqrt{2}a$. Ta chỉ cần tìm bán kính đáy nhỏ nhất của hình trụ để nó chứa toàn bộ lăng trụ đã cho bên trong. Xét D, E là hình chiếu của B', C' lên (ABC) . Đường tròn đáy (ω) của hình trụ phải chứa cả 5 điểm

A, D, E, B, C ; suy ra nó sẽ chứa đường tròn ngoại tiếp (ADE) . Ta sẽ chỉ ra rằng (ADE) chứa điểm B, C bên trong và khi đó chọn $(\omega) \equiv (ADE)$ thì sẽ có diện tích đáy nhỏ nhất.

Gọi I là tâm (ADE) và H là trung điểm DE . Ta có $AH = 2AM = 2a$ nên nếu gọi R là bán kính (ADE) thì $IA = ID = R \Rightarrow R^2 = (2a - R)^2 + a^2 \Rightarrow R = \frac{5a}{4}$.

Khi đó $IH = \frac{3a}{4}, IM = \frac{a}{4}$ nên $IH > IM$, kéo theo $R = ID > IB = IC$. Suy ra B, C nằm trong (ADE) . Do đó, chọn đường tròn đáy là (ADE) thì thỏa mãn đề bài. Thể tích cần tìm là

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{5a}{4}\right)^2 \cdot 2\sqrt{2}a = \frac{25\sqrt{2}\pi a^3}{8}.$$

Bài 5. (3 điểm)

Cho các số thực $a, b, c \in (1; +\infty)$ thỏa mãn $a^{10} \leq b$ và $\log_a b + 2\log_b c + 5\log_c a = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\log_a c + 5\log_c b + 10\log_b a$.

Giải.

Giả thiết đã cho được viết lại thành $\log_a b + \log_b c^2 + \log_c a^5 = 12$.

Đặt $\log_a b = x, \log_b c^2 = y, \log_c a^5 = z$ thì theo đề bài, ta có $x = \log_a b \geq 10$ và $y, z > 0$.

Ngoài ra, ta cũng có $x + y + z = 12$ nên

$$P = \frac{10}{x} + \frac{10}{y} + \frac{10}{z} = 10 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \text{ hay } \frac{P}{10} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{x} + \frac{4}{y+z} = \frac{1}{x} + \frac{4}{12-x}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{12-x}$ trên miền $[10; 12)$, ta có

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(12-x)^2} = \frac{3(x-4)(x+12)}{x^2(12-x)^2} > 0.$$

Do đó, $f(x)$ đồng biến và $f(x) \geq f(10) = \frac{21}{10}$ nên $\frac{P}{10} \geq \frac{21}{10}$ hay $P \geq 21$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 21, đạt được khi $x = 10, y = z = 1$; tương ứng với $b = c^2 = a^{10}$.